Cadre logique et motivations pour les degrés ludiques

Christophe Chalons, université Paris7, équipe de logique mathématique

August 17, 2014

Contents

Chapter 1

Résumé des motivations de l'autre article

1.1 Introduction

Dans la suite des sections de ce chapitre, nous racontons les motivations et la mise en place des outils de l'article *paradigme téléphonique.* Les chapitres qui suivent soulignent un cadre logique qui s'adapte à l'outil degré ludique. En particulier, nous évoquons comment formaliser une question qui parassait informalisable.

1.2 Objectifs

L'objectif mathématique de ce travail était d'étudier des *puissances de téléphones* (dans le sens très précis qui sera défini ci-dessous). Cet objectif était en vue d'étudier les fondements de la mécanique quantique qui posent des problèmes très en amont de la démarche scientifique puisqu'ils remettent presque en cause jusqu'à la logique élémentaire.

On s'est concentré sur un aspect formel, qui est en quelque sorte très ensembliste. Il est fourni par les différents progrès de la physique qui ont permis d'épurer le coeur de ce qui a été très tôt appelé *paradoxe EPR.*

Familiarisons-nous avec le paradigme téléphonique. Dans la section suivante, nous abordons plusieurs formats de téléphones. Nous détaillons cette section introductive qui a soulevé pas mal de discussions et d'objections. Plus précisément, lors des différents partages de la théorie, il nous a été bien souvent reproché la métaphore téléphonique. Nous en remercions les auteurs qui nous ont fourni une liste d'objections évoquant des ambiguïtés ou des contre-sens, selon leur vision, de cette métaphore, qui vont nous permettre de lever ces ambiguités une à une avec patience et précision de sorte quele lecteur pourra ensuite lire sans ambiguité la suite des développements.

1.3 Téléphones et garanties attachées

1.3.1 Téléphones physiques

Les premiers téléphones, peut-être pourrions-nous parler plutôt de télégraphes, étaient constitués d'un objet dit *émetteur* et d'un objet dit *récepteur.* Leur vocation était que l'utilisateur de l'émetteur y *tapait* un message x de son choix et que, le temps que la transmission physique se fasse, l'utilisateur du récepteur *voyait arriver* un certain y sur son récepteur (la vocation idéalisée du *téléphone* étant de **garantir** que $x = y$).

Nous avons utilisé le mot *taper* et *voir arriver*, mais bien évidemment aux époques ancestrales de la téléphonie ces mots pouvaient recouvrir un autre sens que celui de taper sur un clavier et de lire un écran. On peut même évoquer tout simplement la poste, qui n'a pas attendu les premières machines électriques pour adopter et tenter de réaliser cette vocation. Et peut-être, avant la poste, les pigeons voyageurs.

Dans le récit qui précède, on a évoqué le temps de circulation du signal (ou du message), par exemple à la vitesse de 10m/s pour le pigeon voyageur, de 15m/s pour la poste et de 300000000000m/s pour le télégraphe et les premiers téléphones modernes. Il ne serait pas venu à l'idée des consommateurs de téléphonie de l'époque d'oublier cet alinéa dans la garantie téléphonique (dont nous avons évoqué ci-dessus que l'autre partie de cette garantie est $x = y$)

Levons ici une première ambiguité sur l'intention du texte et la métaphore téléphonique: **nous ne nous intéresserons à aucun moment aux limites matérielles**. En particulier, lorsque nous évoquerons des garanties téléphoniques, nous ferons abstraction des dates d'émission et de réception du message ainsi que des emplacements géographiques des utilisateurs. Il s'en suit une conséquence formelle facilitée: une garantie prendra la forme mathématique précise d'un ensemble des couples (ou d'un ensemble de uplets). Insistons:

- La garantie évoquée ci-dessus des anciens téléphones était: *à la condition que vous laissiez le temps au message de circuler de l'émetteur vers le récepteur, notre téléphone garantit que quelque soit le message x que vous émettez, le récepteur recevra bien un message y tel que $x = y$.*
- A partir de maintenant, nous ne parlerons plus jamais de la première excuse *à la condition que vous laissiez le temps au message de circuler de l'émetteur vers le récepteur* . L'énoncé d'une garantie par le fabricant sera de la forme: *notre téléphone garantit que quelque soit le message $x \in E$ qui vous souhaitez envoyer, le récepteur recevra bien un message y tel que $(x, y) \in R$.*

Nous n'évoquerons plus le temps.

1.3.2 Téléphones abstraits

Dans cette section, nous dissipons une autre ambiguité de la métaphore téléphonique. Nous allons étudier différents types de téléphones, ayant différents formats. Cette étude sera purement mathématiques. En réalité, ce que nous étudions ne sont pas les téléphones eux-mêmes, **mais les garanties téléphoniques**. Dans la suite, il ne sera donc plus jamais question de téléphones autrement que vues comme des garanties formelles. Nous n'hésiterons pas à dire, par exemple, *soit le téléphone qui garantit que le récepteur reçoit une droite d du plan telle que $x \in d$ quand l'émetteur envoie un point x du plan.* Cette manière imagée de parler ne sera que pour remplacer l'annonce plus austère *soit le triplet $(Plan, Droites, R)$ tel que $R := \{(x, d) \in Plan \times Droites \mid x \in d\}$.*

La seule question qui nous intéressera est *quel téléphone est plus puissant que quel autre.* Autrement dit, nous allons ordonner partiellement des garanties téléphoniques. Par exemple, est-ce que le téléphone qui garantit la réception d'une droite contenant le point x émis est strictement moins puissant que le téléphone qui garantit la réception d'un ensemble de cardinal au plus 2 qui contient x comme élément?

Jusqu'ici, nous n'avons évoqué qu'un seul format de téléphone (ie de garantie), qui est d'être un triplet (E, F, R) où $R \subseteq E \times F$. Mais cette contrainte est complètement subjective en ce qu'elle provient de la volonté humaine de dédier l'un des combinés comme étant un émetteur et l'autre combiné comme étant un récepteur, **lorsque le couple** *d'objets* **est conçu les parties matérielles d'un téléphone**. Notons au passage que ce que nous appelons ici *téléphone* est généralement plutôt nommé *couple de téléphones.* Nous renommons par le mot *combiné* ce que la vie quotidienne appelle *téléphone.* Et nous adoptons définitivement que les combinés vont ensemble et forment un téléphone à eux tous.

Il n'y a aucun raison de réduire les combinés à des tâches dédiées en les forçant à se catégoriser. Il n'y a, précisément aucune raison d'exiger que les *émetteurs* n'aient pas d'écran et que les récepteurs n'aient pas de clavier. C'est le paradigme de tout le travail. **Chaque combiné** dispose non seulement d'un clavier, mais aussi d'un écran. Il n'y aura plus de notion d'émetteurs, ni de récepteurs. Par ailleurs, il n'y a non plus aucune raison de se limiter à deux combinés pour former un téléphone. Nous concevrons donc le format d'un téléphone comme étant une famille de combinés, auquel on attachera une garantie.

Cette garantie sera donc une partie du produit quand i parcourt l'ensemble d'indices I[1] de la famille des $C_i \times E_i$. Dans la métaphore, il faudra le comprendre, naturellement, et conformément à ce qui précède comme voulant dire:

Chers utilisateurs, quand vous taperez sur vos claviers C_i les touches x_i, il s'affichera sur vos écrans E_i des réponses r_i telles que $(i \mapsto (x_i, r_i)) \in G$. Et ajoutons afin de bien enfoncer le clou, *et ce, où que vous soyez, et quelle que soit les dates à auxquelles vous taperez sur vos claviers, les réponses s'affichant en outre presque instantanément, ie moins d'une seconde plus tard.*

1.3.3 Puissance de téléphones abstraits

S'il nous apparaît plus confortable d'utiliser le paradigme imagé qui précède, il n'en est pas moins à ne pas oublier que nous ne ferons, tout au long du texte que comparer des garanties. La définition retenue, évidente, exprime que les utilisateurs sont à priori éloignés les uns des autres. Un téléphone est plus puissant qu'un autre quand les utilisateurs ont une stratégie pour simuler l'un avec l'autre, des stratégies qu'on pourrait qualifier de locales.

Pour chaque ensemble d'indice I, il existe un préordre qui compare les téléphones d'uplicité I et tout le travail consiste à étudier ce préordre, donner des classes importantes. Les classes d'équivalence $(t_1 = t_2) := (t_1 \leq t_2 \text{ et } t_2 \leq t_1)$ sont appelées *degrés ludiques*. Pour chaque uplicité I, le préordre est en un certain sens symétrique, c'est à dire qu'il existe une involution décroissante naturelle sur la classe des degrés ludiques d'uplicité I. Cela résulte de l'axiome du choix, mais pourrait être réécrit en s'en dispensant, à la condition de retenir une autre notion de stratégie. Dans tout le texte, sauf mention explicite du contraire, nous avons travaillé avec AC et utilisons la définition suivante:

Définition 1 *Soit J un ensemble (qui sera appelé l'uplicité: c'est l'ensemble des numéros des combinés), et une famille $i \in J \mapsto (E_i, F_i, E'_i, F'_i)$. Soit G, H des ensembles (ce sont ces ensembles G, H que nous comparons en les considérant comme des garanties). Le téléphone $T_1 := ((i \mapsto (E_i \times F_i)), G)$ est dit plus faible quele téléphone $T_2 := ((i \mapsto (E'_i \times F'_i)), H)$ (on notera $T_1 \leq_{ludique} T_2$), quand il existe une famille $i \in J \mapsto (f_i \in (E_i \to E'_i), g_i \in ((E_i \times F'_i) \to F_i))$ (on note $X \to Y$ l'ensemble Y^X) telle que pour tout $x \in \prod_i E_i, y \in \prod_i F'_i$: si $(i \mapsto (f_i(x_i, y_i))) \in H$ alors $(i \mapsto (x_i, g_i(x_i, y_i))) \in G$*

qui, bien qu'un peu cabalistique, est la traduction directe du fait que le téléphone T_2 permet de simuler le téléphone T_1. Chaque $(E_i \times F_i)$ doit être considéré comme un des combinés du téléphone T_1 (E_i est le clavier de ce combiné et F_i son écran).

Définition 2 *Le dual de T_1 est le téléphone ayant la même uplicité et défini par $E'_i := (E_i \to F_i)$ pour chaque $i \in J$ et $F'_i := E_i$. Sa garantie est l'ensemble des $(i \mapsto (f_i, x_i))$ tels que $(i \mapsto (x_i, f_i(x_i))) \notin G$*

Le théorème de dualité est:

Théorème 3 *Pour toute uplicité, la fonction $T \mapsto dual(T)$ est décroissante pour le préordre ludique. De plus pour toute uplicité et tout téléphone T, $dual(dual(T)) =_{ludique} T$*

Lorsqu'il n'existe pas de famille de fonctions $(i \mapsto f_i \in E_i \to F_i)$ telle que $\forall x \in \prod_i E_i : (i \mapsto (x_i, f_i(x_i))) \in G$ le téléphopne T_1 nécessite une certaine "<magie"> pour marcher et c'est cette magie que mesure l'ordre ludique après quotientation. **Il se trouve** que la Nature nous offre un peu de magie (quelques téléphones non triviaux existent dans la nature selon la TQ et les expériences qui les ont testés)

[1] I est appelé l'uplicité du téléphone

Cette dualité fait émerger comme une trivialité une classe co-initiale de degrés ludiques que nous avons nommés *antiCantor*. En effet, cela résulte de l'évidence que la classe des téléphones qui garantissent $\forall i \in I : r_i = x$ forment une classe manifestement cofinale au sein de l'uplicité I. Armé de ces anticantor, nous nous en servons de témoins génériques pour démontrer un théorème qui aurait été difficile à prouver sans se restreindre à des garanties particulières: tout degré ludique d'uplicité 2 qui n'est pas trivial dépasse au moins une injection virtuelle elle-même non triviale entre degrés de Tukey.

1.3.4 Gap des écrans des émetteurs (et des claviers des récepteurs)

Comme on vient de le dire, la notion subjective d'émetteur-récepteur a été retirée de la définition de puissance de téléphone puisqu'elle n'était pas pertinente (de même que l'idée de se restreindre à l'uplicité 2). On peut dès à présent se demander si retirer à un utilisateur *qui se vit comme un émetteur* le droit de concevoir son combiné comme étant entièrement un clavier constitue une généralisation importante. La répone est oui et est édifiante: en quelque sorte le fait que le combiné utilisé comme un émetteur par l'utilisateur puisse *se défouler* en disant des choses sur un écran généralise incroyablement le panel des téléphones concevables (il aurait pu apparaitre intuitif que ce ne soit pas le cas). Symétriquement, et c'est peut-être plus facile comprendre à l'autre bout, le fait qu'un utilisateur qui se conçoit comme un récepteur aità taper quelque chose sur un clavier, en plus de seulement lire son écran généralise énormément l'étude.

Cette généralisation situe (accidentellement, ce n'était pas le but initial) notre étude des téléphones dans un contexte qui n'est du coup pas totalement nouveau. En effet, les téléphones à deux combinés (d'uplicité 2) où l'un des deux n'a pas d'écran et l'autre n'a pas de clavier **ont déjà été étudié dans le passé**, sans bien sûr être présentés comme tel, ie comme des téléphones. Les *puissances* de ces **téléphones particuliers** portent le nom de degrés de Tukey.

1.3.5 Cas particuliers des degrés de Tukey

Nous avons donc fait le point et probablement redémontré les lemmes de base ainsi que quelques théorèmes importants concernant les degrés de Tukey. Dans la mesure où les Tukey sont des puissances de téléphones orientés (émetteur vers récepteur), on peut les considérer comme une généralisation de la notion de cardinal. On gagne malgré ça un certain nombre de merveilles dont nous ne disposions pas avec la notion de cardinal: une involution décroissante (dont la définition est triviale, même si elle émerge de l'involution ludique, elle, non triviale), et une mesure fine de questions que s'arrêter aux cardinaux ne permettait pas d'aborder. A côté, on ne perd rien: les degrés de Tukey s'additionnent, se multiplient (ces opérations ne sont que des prolongements des mêmes connues qui agissent sur les cardinaux). Les mêmes lemmes combinatoires que ceux concernant les cardinaux sont vrais en remplaçant juste "<cardinal"> par "<degré de Tukey"> dans leurs énoncés. Comme travail déjà très accompli, Stevo Todorcevic a classé les degrés de Tukey de tous les préordres dénombrables.

1.3.6 Eternité

Une question inabordable avec la notion de cardinal est informellement de comprendre à partir de quelle puissance téléphonique, on ne peut plus faire de construction par récurrence inversée (construction d'une suite u telle que pour tout $n : u_n$ est obtenu à partir d'une certaine quantité d'information sur u_{n+1}). Aborder cette question avec la notion de cardinal est très limitatif: on obtient que le fini est trop faible et l'infini trop fort et ça s'arrête là (lemme de Konig)

L'intérêt des Tukey est qu'à défaut de savoir si on va répondre à la question, **elle est posable**. Et il se trouve qu'on peut y répondre. Nous avons caractérisé le niveau exact de puissance limitant les deux zones de puissances.

1.3.7 Densité par le bas

Quand un degré de Tukey a n'est pas $\leq$ un degré de Tukey b, l'injection virtuelle (qui est un degré ludique d'uplicité 2, noté $injvrit(a,b)$) de a dans b n'est pas bottomludique. Et réciproquement. Ainsi parmi les degrés ludiques d'uplicité 2, les degrés $injvirt(a,b)$ forment une classe intéressante. Nous avons démontré un résultat qui nous parait extrêmement édifiant: pour tout degré ludique c non trivial d'uplicité 2, il existe des degrés de Tukey a,b tel que a n'est pas $\leq_{Tukey} b$ et pourtant $injvirt(a,b) \leq_{ludique} c$.

Compte-tenu du fait que n'importe quel énoncé mathématique se réduit trivialement à l'étude d'un degré ludique, ce théorème plaide donc en faveur d'une très forte expressivité des degrés de Tukey. Sachant, par ailleurs, que la classe des degrés ludiques casino-inoffensif est une assez grosse classe de degrés non triviaux (même si tous très faibles), cela montre que la notion de degré de **Tukey** permet d'aller mesurer des mécanismes mathématiques qui sont inaccessibles à la démarche probabiliste dont on estime habituellement qu'elle a pourtant pour vocation d'aller éclairer les mécanismes non déterministes. (Les casino-inoffensifs sont les niveaux de magie que la démarche probabiliste ne distingue pas du niveau de magie nul).

1.4 Magie

La Nature, à travers les expériences reproductibles confirmées dont les résultats était prévus par la théorie quantique, a mis à mal jusqu'à la logique élémentaire. Ce point (remise en cause d'évidences très en amont de la pensée scientifique) est d'ailleurs trop mal connu même par de nombreux scientifiques professionnels. On ne compte, même en 2014, plus les scientifiques qui tentent d'élaborer des théories explicatives en quelque sorte "<standards"> des lois de la Nature qui incluraient celles, reproductibles, prédites par la TQ.

Il nous semble relativement vraisemblable que ces espoirs vains subsistent à cause de l'ignorance, par leurs proteurs, d'un théorème de logique formelle: le théorème d'élimination des coupures. L'élimination des coupures des diverses transformations en théorèmes des récits les plus sensationnels des paradoxes quantiques fait apparaitre une *magie quantique*[2]

Cette magie quantique n'est formellement pas distinguable de *contradictions* réalisées sous nos yeux ou presque par la Nature. On sait donc qu'il est vain de *chercher le truc*. A l'heure actuelle, tout au plus a-t-on identifié l'axiome logique sans lequel ces quasi-contradictions sont levées: il s'agit de $\forall X, Y : ((X \to (X \to Y)) \to (X \to Y))$, autrement dit de la possibilité de cloner les hypothèses.

Qu'à cela ne tienne. Puisqu'il semble impossible de *lever* le caractère *magique* de la Nature, il y a une voie mathématique toute trouvée qui consiste à la mesurer formellement. Et il se trouve que la réduction ludique préordre les différents prodiges prédits par la théorie quantique. Mais il n'y a aucune spécifité quantique dans ce préordre. On pourrait tout aussi bien préordonner, et de la même façon, n'importe quelle théorie de film de science fiction.

Nous nous sommes concentré sur le seul paradoxe EPR (les autres prodiges quantiques ne bouleversent pas la logique élémentaire et ne sont pas *mathématiquement choquants*), dont le caractère magique est entièrement saisi par l'approche téléphonique. En fait, les téléphones nommés FMQ (pour prédits fabricables par la théorie quantique) sont très faibles. Mais il suffisent à démontrer l'existence d'objets quantiques reproductibles non clonables (ie offrant une garantie telle que l'hypothèse qu'on puisse les cloner entraine la mise en scène d'une expérience concrète qui falsifierait reproductiblement la TQ). Ces garanties étant purement formelles, elles invitent s'interroger sur le réel.

Afin de mieux comprendre le paysage mathématique, nous sommes très vite sortis du seul cadre de la faible magie quantique et avons étudié des formes de magie beaucoup plus fortes pour les comparer. Mais l'essentiel de notre étude porte sur toute la magie qui se trouve juste en dessous de la franche contradiction protocolaire, c'est à dire des téléphones nonTSD.

[2] Métaphore de l'invincible blanc et noir à recopie en petits caractères: non clonable

En effet, dans notre contexte formel, les téléphones TSD ne sont pas les plus passionnants puisque ni dates d'appui, ni emplacements géographiques ne limitent la garantie. Il est donc protocolairement facile de falsifier l'existence d'un téléphone TSD: il suffit de jouer le jeu $\forall/\exists$ de sa définition dans l'ordre temporel adéquate. On n'a d'ailleurs même pas besoin de décider l'ordonnancement des combinés en fonction des réponses des premiers combinés sollicités, celui-ci étant uniforme. Ainsi, les seuls téléphones étant magiques sans être reproductiblement contradictoires (ie sans être reproductiblement falsifiables) sont les non(TSD).

Mais jusqu'où pouvait-on monter chez les non(TSD)? Ca a été l'objet d'un chapitre et donné un théorème classifiant en quelque sorte *définitif*. Une équipe ne disposant d'aucune magie, mais pouvant cacher à ses testeurs sa capacité à jouer sur plusieurs tables (de la même manière qu'on battrait Kasparov OU Karpov facilement, et impressionnerait les spectateurs qui ignoreraient qu'on fait jouer l'un contre l'autre) peut simuler n'importe quel téléphone nonTSD. Cela offre une sorte d'argument philosophique partiel légèrement en faveur des interprétations multimonde de la Nature quantique.

Le résultat qui précède concerne la totalité des téléphones non falsifiables. Mais la TQ nous offre une magie beacoup moins grande. On est donc parti la chasse à des théorèmes plus forts qui s'appliqueraient seulement à des petites magies. Et ces théorèmes existent. Finalement, le peut-être plus parlant de tous est qu'on peut réellement simuler **tous les téléphones FMQ** en jouant, sans magie, sur plusieurs tables et ... **en gagnant sur toutes les tables!**. Pour reprendre la métaphore Kasparov OU Karpov, ce deuxième théorème dit qu'on dispose d'un moyen *facile* pour battre LES DEUX ADVERSAIRES (sans expertise au jeu d'échec)

1.5 Conclusion

Ce préordre *qu'est-ce qui est plus magique que quoi?* n'a été probablement qu'effleuré dans ce travail. Cependant, il nous livre des questions ouvertes et une possibilité de faire sémantiquement des mathématiques même dans un paysage caché par le contradictoire. Des tentatives existaient mais s'appuyaient plutôt sur l'expertise syntaxique de certains logiciens. Ici on est dans un cadre complètement sémantique: on utilise la banale et élémentaire théorie des ensembles.

1.5.1 Questions ouvertes et perspectives

Je ne continue pas ce stade, je ne veux pas taper 3-4 pages complètement hors de propos, je préfère attendre réaction de Abou, JPR et Anatole, ainsi que peut-être les premières demandes de correction des rapporteurs. D'autant que j'ai axé (c'est 100% sincère) les commentaires sur les motivations physiques.

Chapter 2

Les degrés ludiques forment un modèle de la logique affine

2.1 Introduction

Les degrés ludiques ont été définis dans l'article de HAL titré *paradigme téléphonique*. Il servent à mesurer de la magie. Plus formellement, pour chaque ensemble I appelé *uplicité*, on dispose d'un ordre partiel qui mesure la capacité d'un uplet de I combinés téléphoniques, muni d'une garantie, le tout étant appelé un téléphone. Par exemple un téléphone qui envoie du futur vers le passé le récit complet des évènements de ce futur est très puissant et cette puissance est représentée par un degré ludique.

Pour chaque uplicité le préordre (qui donne par quotient les degrés ludiques) des degrés ludiques concernés a la propriété de la borne inférieure, de la borne supérieure, est doté d'une involution décroissante naturel. Il est aussi muni de deux opérations produit et de leur duale. Dans l'article *paradigme téléphonique*, nous avons juste donné la définition du produit et quelques unes de ses propriétés. Dans le présent chapitre nous étudions l'autre produit, que nous appellerons *produit tensoriel* et en analysons les propriétés principales.

Une liste de résultats remarquables est que les degrés ludiques, munis de ce produit tensoriel (et de l'ordre) forment un modèle complet de la logique affine. Par ailleurs toutes les logiques au dessus de la logique affine sont représentées. En particulier, la logique classique est la classe des degrés nonTSD (un gros théorème de l'article précédent est qu'un degré est nonTSD ssi l'une des puissances tensorielles de son dual est égale à 1 (le plus faible des degrés ludiques, celui représentant la magie nulle)).

L'un des intérêts de cette structuration logique des degrés ludiques est qu'ils peuvent, dans la paradigme généralisé du forcing, être vus comme des valeurs de vérité. Il s'ensuit que les degrés FMQ (les degrés qui mesurent la magie quantique) donneront exactement le pendant de la logique quantique. Plus une logique est forte, plus elle interdit à certains niveaux de magie de se produire, le niveau maximal d'interdiction de magie étant celui qui interdit à tout téléphone non trivial (ie de degré autre que 1) d'exister physiquement. Par ailleurs, on peut, avec cette structuration nourrir un grand nombre de questionnements: en particulier, on formalise une question qu'il paraissait impossible de formaliser: *existe-t-il un énoncé mathématique absolument isomorphe à sa négation*. Cette question purement philosophique, paraissait inaccessible: on sait qu'il est contradictoire qu'un énoncé soit équivalent à sa négation (en logique classique et intuitionniste). Intuitivement on aurait envie de penser que tout énoncé mathématique, quelqu'il soit, nous des choses sur le monde différentes de ce que nous dit sa négation (même si ni l'un, ni l'autre ne sont prouvable).

Il se trouve *qu'en faisant du forcing* avec comme valeurs de vérité non pas des éléments d'une algèbre de Boole mais plutôt les degrés ludiques la question devient mathématique: *existe-t-il un énoncé mathématique dont la valeur ludique, pour l'uplicité 2 (resp n) est égale au dual de sa permutée (resp d'une de ses permutées)*. Comme on va le voir, il n'existe pas de degrés ludiques d'uplicité fini autoduaux (égaux à leur dual). Par contre, du fait de la profusion de degrés de Tukey autoduaux (n'importe quel ordre total sans maximum), il existe (on prend les représentants ludiques de ces degrés) des tas de degrés ludiques égaux à la permutée de leur dual. N'importe quel énoncé mathématique qui aurait une telle valeur de vérité **serait absolument indécidable** (ie parfaitement équivalent philosophiquement à sa négation), et aucun espoir de le décider, même en changeant de théorie, ne serait tenable.

2.2 Définition de l'implication

2.2.1 Définition du "<ou"> tensoriel

Soit I un ensemble (uplicité fixée une fois pour toute). Soit K. Soit $k \in K \mapsto D_k$ une famille de (représentants de) degrés ludiques. La disjonction tensorielle des téléphones D_i est défini par la garantie que $(i \mapsto (q_i, r_i))$ est acceptée quand il existe $k \in K$ telle que $(i \mapsto (q_i(k), r_i(k)))$ est accepté par D_k.

Lorsque $K = 2$, on n'hésitera pas à noter A *ou* B la disjonction tensorielle de $\{(0, A); (1, B)\}$. On rappelle que le dual (noté D^*) d'un téléphone D est défini par la garantie qui accepte $(i \mapsto (f, r))$ quand $i \mapsto ((r_i, f_i(r_i)))$ est rejeté par D.

Définition 4 *Pour tous téléphones A, B, le téléphone A^* ou B sera noté $A \to B$. On l'appellera implication de B par A. De plus, à partir de maintenant, si ça n'induit pas d'ambiguité, on notera $non(A)$ le téléphone A^*. De plus, il est naturel de noter $a \otimes b$ le dual du ou tensoriel, ie $(a \otimes b) := non(non(A)$ ou $(non(b)))$*

2.3 Théorèmes

Nous laissons les démonstrations au lecteur (avec éventuellement des indications). Elles ne sont pas forcément faciles, car les écritures sont pénibles, mais elles sont routinières

Théorème 5 *Les notions précédentes passent au quotient et ont donc un sens pour les degrés ludiques et pas seulement leur représentants. Plus précisément, entre représentants de degrés ludiques, on a:*

- *Si $a \leq a'$ alors $(a$ ou $b) \leq (a'$ ou $b)$*
- *Donc $\to$ est croissante à droite et décroissante gauche*
- *Pour tout A, le téléphone $(non(A))$ ou$A$ est trivial (de degré 1, ie est bottom ludique)*

2.3.1 Exemple

Prenons l'uplicité 2. Dans le précédent article nous avons rappelé comment les degrés de Tukey généralisent la notion de cardinal. Nous avons aussi remarqué que les degrés de Tukey sont des cas particuliers de degrés ludiques d'uplicité 2. Moyennant la convention, pour l'uplicité2, que l'émetteur souhaite disposer du combiné 0 et que le récepteur souhaite prendre le combiné 1 , nous pouvons nous restreindre aux téléphones $\{((q, 0), (0, r)) \mid qRr\}$ qui servent à écrire les degrés de Tukey R. En particulier, nous pouvons parler des cardinaux. Dans l'article nous avons donné comme exemple celui des injections virtuelles entre degrés de Tukey (et plus particulièrement entre cardinaux). De manière imagée, quelle magie faut-il pour injecter 5 dans 3. En fait-il plus pour injecter 6 dans 3?

Théorème 6 *Pour tous représentants ludiques a, b des degrés de Tukey a', b', l'injection virtuelle de a' dans b' est égale (équivalente ludiquement) à b implique a, ie au degré ci-dessus nommé $b \to a$*

C'est assez naturel: par exemple $3 \to 5$ représente la magie (ou la force) nécessaire et suffisante pour échanger la force 3 contre la force 5

2.3.2 Distributivité

Le degrés ludiques se comportent comme des valeurs de vérité (soumises aux règle de la logique linéaire, à quoi on ajoute le droit de jeter des ressources à la poubelle, autrement dit, aux règles de la *logique affine*). Nous avons mis en annexe un petit kit qui permet au lecteur ignorant tout de ces logiques de s'en faire une idée. Il n'y a que dans la logique linéaire que $non(a)$ n'est pas équivalent à $A \to tout$. Cela étant dû au fait que $non(a)$ est bien équivalent à $a \to ((non(1)))$, mais qu'on n'a pas forcément $\forall x : (x \to 1)$. En fait, comme il est démontré en annexe,

Théorème 7 *Un modèle de la logique linéaire dans lequel $\forall x : x \leq 1$ est un modéle de la logique affine*

On en donne une preuve, vue qu'elle est extrêmement courte: $a \otimes b \leq a \otimes 1 = a$

C'est le théorème suivant qui pose les degrés ludiques comme modèle de la logique affine: Attention, on inverse l'ordre!!!! A partir de maintenant $a \leq b$ signifiera que le téléphone a est **plus puissant** que le téléphone b

Théorème 8 *Le produit tensoriel est distributif par rapport à la borne supérieure.*

Ludiquement, les degrés ludiques vérifient la logique affine, ie, on peut jeter le b dans $a \otimes b$, ça affaiblira le téléphone, ie les deux téléphones $a \otimes b$ et a sont comparables, le téléphone $a \otimes b$ étant plus magique que le téléphone a. Le théorème suivant, déjà prouvé dans l'article précédent est important par sa signification:

Théorème 9 *La logique classique (ie l'ensemble des téléphones moins puissants qu'au moins une forme qui soit un théorème de la logique classique) est exactement la collection des téléphones nonTSD, ceci s'appliquant à chaque uplicité.*

preuve: L'un des sens est évident. L'autre vient du fait qu'un téléphone nonTSD est multitable. Quand a est multitable, il existe un ordinal κ tel que $(non(a))^{\otimes\kappa}$ est le topludique (le degré maximum). La logique classique exige que $non(a) \to [(non(a))^{\otimes\kappa}]$ (pouvoir de cloner les ressources). Il s'ensuit que $non(a) \to 0$ est un théorème de la logique classique donc que a en est un

2.4 Petit bilan

On dispose de 3 produits et de leurs duaux: le produit tensoriel, le produit classique (défini dans l'autre article) et la borne inférieure (borne supérieure pour l'ordre ludique). Les classes importantes sont (se doivent d'être) stables par modus ponens et abstraction. On a l'ordre suivant entre les produits:

$$a \otimes b \leq a \times b \leq inf(a, b)$$

ainsi que les même considérations dualement.

Le théorème suivant exprime qu'il était impossible de plonger les degrés de Tukey dans les degrés ludiques sans passer par une permutation.

Théorème 10 *Pour toute uplicité, il n'existe pas de plongement de (Degrés de Tukey, $\leq_{Tukey}$, Dualité de Tukey) dans (Degrés ludique, $\leq_{Tukey}$, Dualité ludique) (sous-entendu qui respecte l'ordre des combinés)*

Preuve: comme il existe des degrés ludiques autoduaux d'uplicité infinie, l'argument n'évoque que l'autodualité des ordres totaux chez Tukey. Elle utilise en plus le fait que ce soit des degrés de Tukey a tels que $a \times a = a$. En effet (voir chapitre annexe), si on pouvait plonger les Tukey dans un modèle de la logique linéaire, on aurait: $a \leq (a \to tout)$ donc

$1 \leq ((a \times a) \to tout)$ (En effet, chez les degrés de Tukey, le produit simple est égal au produit tensoriel). On aurait donc $1 \leq (a \to tout)$, donc $a \leq tout$, donc $1 \leq 0$.

Il reste à démontrer (routine à priori mais tant qu'on le fait pas...) les théorèmes suivants:

- Stabilité de FMQ, fortement nonTSD et casino-inoffensif par modus ponens et abstraction
- Identification des logiques formelles (ensemble de formes) correspondant éventuellement à ces classes de degrés.
- On rappelle que la logique intuitionniste est l'ensemble des formes obtenues en abrégeant l'implication $a \to_{intuitionniste} b :=$ la borne supérieure des $a^{\otimes \kappa} b$ et en demandant lesquelles sont des degrés triviaux.

Chapter 3

Uplicité1

Dans *paradigme téléphonique*, nous avions passé relativement sous silence l'étude de l'uplicité 1, la plus simple et la moins à priori "$<$téléphonique"$>$. Elle avait été évoquée plus en détails dans l'article d'introduction co-écrit avec JPRessayre.

La structure de logique qu'ont les degrés ludiques la réhabilite et nous entrons dans les détails. Tout d'abord, contrairement à ce qui arrive pour les uplicités de cardinal ≥ 2, la non existence d'un degré autodual (égal "$<$à sa négation"$>$) n'est pas évidente. Nous en donnons une démonstration plus détaillée. Ensuite, l'intérêt de l'uplicité1 est le rapport plus serré avec les extensions de l'univers. A l'occasion nous redonnons toutes les définitions afin de proposer un petit exposé self-contained.

3.1 Rappel des définitions

On suppose qu'on a deux univers $V_1 \subseteq V_2$ vérifiant ZFC contenant (pour simplifier) les mêmes ordinaux et avec V_1 sous-collection transitive de V_2. On appelle *représentant de degré ludique d'uplicité1* un triplet (E, F, R) où E et F sont des éléments de V_1 et R un élément de V_2. Rien d'autre ne change par rapport aux autres uplicités, en dehors du fait qu'ici on étudie des situations où la relation vit dans un sur-univers, mais les témoins de réduction vivent dans V_1. En particulier $(E, F, R) \leq_{ludique} (E', F', R')$ abrège *il existe* $f \in (E \to E') \cap V_1$, *il existe* $g \in ((E \times F') \to F) \cap V_1$, *tels que pour tout* $x \in E, y \in F'$: *si* $(f(x), y) \in R'$ *alors* $(x, g(x, y)) \in R$.

Comme d'habitude, les degrés ludiques relativement à (V_1, V_2) sont les classes d'équivalence pour le pré-ordre ci-dessus défini. Les mêmes opérations sont à recopie près définies: bornes supérieures et bornes inférieures, produit usuel, produit tensoriel, leur duale, et finalement l'implication, ie: $(a \to b) := a^*$ *ou* b, où $x \mapsto x^*$ désigne l'opération duale.

La première question à laquelle nous répondons: *existe-t-il des degrés autoduaux?*. Dans le cas de l'uplicité≥ 2, la réponse est évidente (puisque si $\forall x_1 \exists y_1 \forall x_2 \exists y_2 [...]$ alors $\exists f_1 \forall x_1 \exists f_2 \forall x_2 [..._2]$ où on a remplacé y_i par $f_i(x_i)$). On ne dispose plus de combinés supplémentaires pour argumenter avec l'uplicité1. On procède autrement:

Théorème 11 *Il n'existe pas de téléphones audual d'uplicité1. Et ce que V_1 vérifie ou non l'axiome du choix.*

Sketch de preuve: il y a équivalence entre être autodual et l'existence de stratégies gagnant sur 2 tables, une paire pour chaque sens. Or cette condition ne va pas pouvoir filtrer, sinon on prend un ultrafiltre qui prolonge et ça donne une relation binaire **appartenant à l'univers** V_1. Au prix d'un peu plus de soin, on élimine l'axiome du choix.

Soit $f \in V_1$ telle que $\forall x, y$ dans E, $(x, f_0(x, y)) \in R$ ou $(y, f_1(x, y)) \in R$. (Rappelons que R est une relation de V_2 et non de V_1, mais que f elle est dans V_1 et que $f \in E^1 \to F^1$. Cette condition traduit le fait que $R \leq non(R)$).

On écrit la condition qui traduit que $R \geq non(R)$. C'est attesté par une $\phi \in V_1$ telle que pour toutes f_0, f_1 de $V_1 \cap F^E$, $(\phi_0(f), f_0(\phi_0(f))) \notin R$ ou $(\phi_1(f), f_1(\phi_1(f))) \notin R$.

On fait maintenant tout le raisonnement dans V_1. Soit H une ensemble fini. On note $\sigma(E, F, f, \phi, H)$ (dans le paragraphe, E, F, f, ϕ ne bougeant pas on abrègera par $\sigma(H)$) l'ensemble des $R \subseteq E \times F$ telles que pour tous x, y dans $H \cap E$: $(x, f_0(x, y)) \in R$ ou $(y, f_1(x, y)) \in R$ et tous éléments f_0, f_1 dans $H \cap F^E$, $(\phi_0(f), f_0(\phi_0(f))) \notin R$ ou $(\phi_1(f), f_1(\phi_1(f))) \notin R$.

Il existe un H fini tel que $\sigma(H)$ est vide. En effet, sinon, en prenant un ultrafiltre W qui prolonge le filtre engendré par les $\sigma(H)$, on obtiendrait une relation $R \subseteq E \times F$ qui (serait un habitant V_1!!). Ce qui conduit à une contradiction.

Remarque: dans la preuve ci-dessus, notons $niveau(f, \phi)$ le plus petit cardinal possible pour un ensemble fini H tel que $\sigma(H) = \emptyset$. On peut se poser la question suivante: *existe-t-il une borne uniforme pour $niveau(\phi, f)$, qui ne dépende que de E, F?* (Autrement dit, a-t-on un argument "<algébrique">)? La réponse est non.

Théorème 12 *Pour chaque entier n, il existe des ensembles (finis!) E, F et des fonctions f, ϕ telles que pour tout H fini si $card(H) \leq n$ alors $\sigma(E, F, f, \phi, H) \neq \emptyset$.*

Sketch preuve: Prenons un entier p (assez grand). Demandons-nous le niveau de magie nécessaire pour colorier les éléments de $p+1$ de telle sorte que 0 soit vert, p soit rouge et deux élément consécutifs de $p+1$ soient de la même couleur. (On rève donc d'une $R \subseteq (p+1) \times 2$ (on pose vert:=0 et rouge:=1, pour l'image) ayant certaines propriétés). Ce rève définit les fonctions f et ϕ suivantes. Face à un couple (x, y) d'éléments de $p+1$, (f_0, f_1) réagit en déclarant rouge le plus grand des deux et vert le plus petit des deux. Définissons maintenant ϕ. Face à deux applications f_1, f_2 de $p+1$ dans 2, tout d'abord ϕ regarde si elles sont différentes. Si oui, $\phi_0(f_0, f_1) := \phi_1(f_0, f_1) :=$ un k tel que $f_0(k) \neq f_1(k)$. Sinon, posons $f := f_1 = f_2$ et $g := (f, f)$. Si f envoie 0 sur rouge, ϕ_i envoie g sur 0, sinon, si f envoie p sur vert, ϕ_i envoie g sur p, sinon, ϕ cherche deux éléments consécutifs $k, k+1$ de $p+1$ envoyés par f sur des couleurs différentes et $(\phi_0(g), \phi_1(g)) := (k, k+1)$. L'obtention d'un sigma vide devra alors passer par l'évocatoin de tous les éléments de $p+1$, ce qui assure un cardinal minimum.

3.2 Retour à l'uplicité quelconque

3.2.1 Une question réputée informalisable

Nous avons évoqué ci-dessus une question *philosophique* dont on a le sentiment qu'elle est intéressante et dont on pourrait croire qu'elle n'est pas formalisable: *existe-t-il un énoncé mathématique "<isomorphe"> à sa négation?*. Nous la formalisons:

Soit E un ensemble inaccessible. Nous associons (de manière routinière, comme dans le forcing) une "<valeur de vérité"> à chacun des énoncés du langage de la théorie des ensembles, clos, à paramètres dans E. Cette valeur de vérité est un degré ludique. Soit a un degré de Tukey égal à son dual (il en existe plein, n'importe quel degré de Tukey d'un ordre total sans maximum faisant l'affaire). On note a' le degré ludique canonique d'uplicité2 dans lequel il se plonge. Evidemment a' n'est pas équivalent à son dual, mais il est équivalent au permuté (le combiné1 devient le combiné2) de son dual. Nous dirons qu'un degré ludique d'uplicité finie n est faiblement autodual quand il est égal à l'un des permutés de son dual. Soit n une uplicité$\in E$.

Dans la suite on ne considère que des téléphones dont tous les claviers et tous les écrans valent E **pour l'ensemble des énoncés atomiques** (comme on l'a vu, ça ne change rien à la généralité des considérations qui vont suivre). Les garanties considérées seront donc des parties de $\prod_i \in n(E \times E)$.

Si a, b sont dans E on note $val(a \in b) :=$ le téléphone dont la garantie est $\{x \mid (a, x) \in b\}$. Si on a déjà défini $val(A), val(B)$, on note $val(A \to B)$ le représentant de degré ludique $val(A)^*$ *ou* $val(B)$. Si pour chaque élément

$a \in E$, on a défini $val(R(a))$, on définit $val(\forall x R(x)) :=$ la borne supérieure (en tant que puissance téléphonique) des $val(R(a))$ quand a parcourt E.

L'application définit ainsi, à partir d'un ensemble inaccessible (ou de n'importe quel ensemble), et d'une uplicité n une fonction $val_{n,E}$ qui associe à chaque énoncé à paramètres dans E une degré ludique d'uplicité n. (Attention: n peut tout à fait être un ensemble infini, mais nous avons choisi ce nom pour suggérer que le cas fini est plus facile).

La question évoquée peut être formalisée comme suit:

Existe-t-il un ensemble E (si possible inaccessible), une uplicité finie n et un énoncé clos SANS PARAMETRE P tel que $val_{n,E}(P)$ est faiblement autodual

Un tel énoncé serait parfaitement *isomorphe* à sa négation, la différence entre *isomorphe* et *équivalent* se faisant dans le faiblement (ie à permutation des combinés près)

Il existe des degrés ludiques autoduaux (pas seulement faiblement), mais ils sont tous d'uplicité infinie et construits avec des jeux infinis non déterminés. On peut à tout le moins formuler une question, même si elle a peu de chances d'avoir une réponse positive:

Existe-t-il un ensemble E (si possible inaccessible), une uplicité n et un énoncé clos SANS PARAMETRE P tel que $val_{n,E}(P)$ est autodual

Chapter 4

Annexe sur les SUCU

4.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter à des mathématiciens non logiciens une structure précise qui donne une idée des senteurs de la logique linéaire. Je ne suis pas du tout spécialiste de LL, et c'est l'intérêt, me semble-t-il de ce témoignage. Ne la connaissant que par *rumeurs glanées ici ou là dans les médias scientifiques*, j'ai pu constater qu'on a du mal à faire des choix dans ... les définitions de départ. Afin de me forcer à *poser un tel choix*, j'ai écrit ce pdf. Un peu plus loin dans le texte, je reviens sur les motivations des définitions et leur plus complète honnêteté et franchise possible (ie ne rien mettre dans les axiomes qui soit trop ... un axiome). La logique linéaire est une logique très faible, espérons que les SUCU définies ci-dessous ne rajoutent rien de plus à la LL que ce qu'elle contient déjà (le passage au second ordre mis à part, condition pour éviter des atermoiements de démarrage sur la syntaxe)

4.2 Définitions des SU, SUC, SUCU

On appelle *structure universelle* la donnée d'un uplet $(A, \to, \leq)$ où:

- $\leq$ est un ordre complet pour A (toute partie a une borne sup et une borne inf)
- $\to$ est une application de A^2 dans A.
- Pour chaque $a \in A : (x \mapsto (a \to x))$ est croissante
- Pour chaque $a \in A : (x \mapsto (x \to a))$ est décroissante
- $\forall a, b, x, y$: si $a \leq b$ et $(a \to b) \leq (x \to y)$ alors $x \leq y$
- Pour tout ensemble E et toutes applications f, g de E dans A, la borne inférieure des $(f(e) \to g(e))$ est $\leq a \to b$ en notant a la borne inférieure des $f(e), e \in E$ et b la borne inférieure des $g(e), e \in E$

Théorème 13 *Dans une SU: pour toute partie X de A et tout $a \in A$, la borne inférieure des $(a \to x)$ quand x parcourt X est $\leq (a \to (inf(X)))$*

Nous en laissons la preuve au lecteur. La borne inférieure de A tout entier sera notée 0. La dernière propriété demande à l'opération $\to$ de réaliser une certaine plénitude (ou distributivité). Une structure universelle sera dite commutative quand $\forall a, b, c : a \to (b \to c) = b \to (a \to c)$. On abrège SU:=*structure universelle* et SUC:=*structure universelle commutative*. On appelle *SUCU* une *SUC* ayant un élément 1, ie un élément vérifiant $\forall a \in A : (1 \to a) = a$. On note V le maximum de la SU.

On note $a \otimes b :=$ la borne inférieure de l'ensemble des $(a \to (b \to x)) \to x$ quand x parcourt A.

Théorème 14 *Dans une SUC:* $a \leq ((a \to b) \to b)$

Preuve: vient de $((a \to b) \to (a \to b)) \leq (a \to ((a \to b) \to b))$ et $(a \to b) \leq (a \to b)$

Dans la suite, on ne s'intéresse qu'aux SUCU (ou éventuellement aux SUC). Une SUC sera dite symétrique quand il existe une involution décroissante ϕ de A dans A vérifiant $\forall x, y : (x \to y) = (\phi(y) \to \phi(x))$

Théorème 15 *Dans une SUC:* $(a \to b) \leq ((b \to c) \to (a \to c))$

Preuve: d'après le théorème précédent, $(a \to b) \leq (a \to ((b \to c) \to c))$. Or $(a \to ((b \to c) \to c)) = ((b \to c) \to (a \to c))$

Théorème 16 *Dans une SUC:* $((a \to a) \to b) \leq b$

Preuve: C'est dû au fait que $a \leq a$ et que $(a \to a) \leq (((a \to a) \to b) \leq b)$

Théorème 17 *Dans une SUCU,* $\forall a, b : (a \leq b) \iff (1 \leq (a \to b))$

Preuve: $(a \to b) \leq (a \to (1 \to b))$ donc $(a \to b) \leq (1 \to (a \to b))$, donc si $a \leq b$ alors $1 \leq (a \to b)$. Réciproquement, supposons $1 \leq (a \to b)$. Comme $1 = (1 \to 1)$, donc $(1 \to 1) \leq (a \to b)$. Comme $1 \leq 1$ donc $a \leq b$

4.2.1 Remarque

Le théorème précédent est intéressant en ce qu'il montre que 1 minore en particulier tous les éléments $(x \to x)$. En fait, 1 est précisément égal à la borne inférieure et même le minimum des $x \to x$ quand x parcourt A, car $1 = (1 \to 1)$.

4.2.2 SU vivantes

On dira qu'une SU est vivante quand tout système d'équations à points fixes (abréviation SEPF) possède au moins une solution. Un SEPF est un système d'équations de la forme $x_i = expression_i$ où pour chaque i, $expression_i$ est un terme construit avec des inconnues, l'opération $\to$ et des constantes. En outre, on demande que chaque inconnue ne figure qu'au plus une seule fois à gauche dans chaque équation.

Exemple: voici une équation à point fixe: $E_a := [x = x \to a; inconnue\ x]$. Dans une SUCU vivante non triviale, il n'est donc pas possible d'avoir pour tous $a, b : (a \to (a \to b)) \leq (a \to b)$. En effet, cela entraînerait alors, étant donné une solution w à l'équation E_a précédente, que pour tout a, $1 \leq a$ et donc que A serait un singleton. En effet, de $w = (w \to a)$, on déduit $w \leq (w \to a)$ donc $1 \leq (w \to (w \to a))$ donc $1 \leq (w \to a)$, donc $1 \leq w$ donc $w \leq a$ donc $1 \leq a$. Si ceci vaut pour tout a alors $\forall a, b : 1 \leq (a \to b)$ donc $a \leq b$. (voir[1])

A partir d'un élément a, on peut cependant définir dans toute SU, un élément $exp(a)$ qui en quelque sorte *le plus grand possible* tel que $exp(a) \leq a$ et tel que pour tout $x : (exp(a) \to (exp(a) \to x)) \leq (exp(a) \to x)$

Définition 18 *Soit* $a \in A$. *Soit* X *le plus petit sous-ensemble de* A *pour l'inclusion tel que* $1 \in X$ *et* $a \in X$ *et toute partie de* X *a une borne inf dans* X *et* $\forall x, y$ *dans* $X : x \otimes y \in X$. *La borne inf de* X *est notée* $exp(a)$.

[1] C'est la crise des fondements du début du vingtième siècle

4.2.3 Remarque sur 1

On a prouvé ci-dessus que $\forall x : 1 \leq (x \to x)$. On pourrait, intuitivement avoir envie de croire à $\forall x : x \leq 1$. Au stade où nous en sommes, ce n'est pas prouvé (et ça apparaitra comme non prouvable un peu plus tard dans le présent doc). A supposer que $\forall x : x \leq 1$, on obtiendrait alors des phénomènes pas inoffensifs du tout:

Théorème 19 *On se place dans une SUCU. Supposons que $\forall x : x \leq 1$. Alors $\forall x, y : x \leq (y \to x)$*

Ce présent théorème apparaît comme donnant une conclusion très puissance qui représente la possibilité de disposer de poubelles à volonté. Sa preuve montre même que dans une SUCU quelconque, on peut jeter à la poubelle, sans cout, tout élément inférieur ou égal à 1.

Preuve: $x = (1 \to x) \leq (y \to x)$ dès lors que $y \leq 1$

4.2.4 Notations

A partir de maintenant, nous adopterons les notations suivantes: $(a \wedge b) := inf(\{a; b\})$ et $a \vee b := sup(\{a; b\})$. Elles sont inhabituelles, au moins en ce qui concerne $\vee$ plutôt généralement noté $\oplus$ (ou encore $+$). La dernière propriété de la définition des SU s'exprime schématiquement par la distributivité suivante:

$$a \otimes (\sum_i x_i) = \sum_i (a \otimes x_i)$$

Cependant, le choix de $\wedge$ et de $\vee$ peuvent paraître plus confortable à l'intuition non logique. Indifféremment, nous utiliserons (sauf précision contraire) aussi bien $\vee$ que $+$ ou $\oplus$ dans le même sens. Par contre, nous maintiendrons $\wedge$ pour la borne inférieure.

Le théorème qui suit clôt, d'une certaine manière, les premiers préparatifs:

Théorème 20 *Dans une SUCU, on a $\forall a, b, c : a \otimes (b+c) = (a \otimes c) \oplus (a \otimes b)$. En outre, $\otimes$ et associative et commutative et $x \mapsto (a \otimes x)$ est croissante. De plus, $a \otimes 1 = a$ et $a \oplus 0 = a$. On a aussi: pour tout $x : (a \to (b \to x)) = (a \otimes b) \to x$*

Preuve (partielle): Soient a, b et notons $p := a \otimes b$. Pour tout $x : (a \to (b \to x)) = p \to x$. En effet, il est évident que $(a \to (b \to x)) \leq (p \to x)$ car $p \leq$ à n'importe quel $(a \to (b \to x)) \to x$, donc $1 \leq (p \to ((a \to (b \to x)) \to x)) = ((a \to (b \to x)) \to (p \to x))$. Dans l'autre sens, il suffit de prouver que $1 \leq (a \to (b \to p))$, ce qui résulte de la distributivité et de $1 \leq (a \to (b \to (((a \to (b \to x)) \to x) \to x)))$.

Il est évident que $x + 0 = sup(\{x; 0\}) = x$ car $0 \leq x$. Aussi bien $(a \otimes b)$ que $(a \otimes c)$ sont $\leq a \otimes (b + c)$. Dans l'autre sens, il suffit de prouver que $(b + c) \leq (a \to ((a \otimes b) \oplus (a \otimes c)))$, or $b \leq (a \to ((a \otimes b) \oplus (a \otimes c)))$ et $c \leq (a \to ((a \otimes b) \oplus (a \otimes c)))$. Comparons $a \otimes 1$ avec a: l'élément $(a \otimes 1) \to a$ est égal à $a \to (1 \to a)$ qui dépasse 1. Dans l'autre sens, il n'y a qu'à regarder $a \to (a \otimes 1)$ comme la borne inférieure des $a \to ((a \to (1 \to x)) \to x)$ pour conclure.

4.2.5 Que vaut $x \otimes 0$?

Les théorèmes précédents font apparaître une SUCU comme un **semi-** anneau. Cependant $(A, +)$ est tout ce qu'il y a de plus éloigné d'un groupe. Les arguments de type "<groupe"> qui conduisent à la conclusion que $x \otimes 0 = 0$ ne sont donc pas exploitables. Comme 0 est le minimum de la structure, $0 \leq x \otimes 0 \leq V \otimes 0$ en notant V le maximum de la SUCU. Il en découle que si $x \otimes 0 \neq 0$ alors $V \otimes 0 \neq 0$. On a l'égalité $(V \otimes 0) \to 0 = V \to (0 \to 0) = 0 \to (V \to 0) \geq 1$ car $0 \leq (V \to 0)$. Il en découle que $(V \otimes 0) \leq 0$ donc $V \otimes 0 = 0$. On a donc le théorème:

Théorème 21 *Dans une SUCU, $\forall x : x \otimes 0 = 0$*

4.2.6 Ensemble des théorèmes d'une SUCU

On l'a démontré un peu plus haut, il y a équivalence (dans une SUCU) entre $a \leq b$ et $1 \leq (a \to b)$. Nous adopterons la définition suivante:

Définition 22 *Soit* $a := (A, \leq, \to, 1)$ *une SUCU.* $Theorem(a) := \{x \in A \mid 1 \leq x\}$

Maintenant que l'on a défini $\otimes$, on peut se demander si $\to$ est définissable à partir de $(\leq, \otimes)$. La réponse est oui:

Théorème 23 *Dans une SUCU* z*, pour tous* $a, b : a \to b$ *est la borne supérieure des* x *tels que* $a \otimes x \leq b$*.*

Preuve: notons s la borne supérieure des x tels que $a \otimes x \leq b$. Il s'ensuit que $(a \to b) \leq s$ car $(a \to b) \to (a \to b) = ((a \otimes (a \to b)) \to b)$. Dans l'autre sens, soit x tel que $a \otimes x \leq b$. Alors $a \to (x \to b) = x \to (a \to b)$ appartient à $Theorem(z)$ et donc $(a \to b)$ majore l'ensemble des x tels que $a \otimes x \leq b$.

4.3 Petit bilan

La notion étudiée à la section précédente ne sort pas de nulle part. Il s'est agi de présenter les rumeurs qu'une personne qui n'est ni chercheur en logique logique linéaire ni en théorie de la démonstration a pu récupérer de divers médias scientifiques.

La notion de SUCU est fondée sur les idées suivantes:

- Tout le monde (y compris les non matheux) accepte de regarder *Si A alors si B alors C* et *Si B alors si A alors C* comme deux phrases dont le sens est absolument égal. C'est ce qui nous a fait nous intéresser, dans ce premier temps, aux SUC, plutôt qu'aux SU.
- La science offre des garanties, et en particulier des échanges de garanties dans le monde matériel. L'opération $\to$ est une abréviation de *si..alors..* mais dans un conteste où on accepte que les gens puissent parler de tout ce qui leur passe par la tête. Il s'en suit que la notion de phrase scientifique ne peut plus revendiquer un statut idéal et immuable. Cela peut être un mécanisme de négociation ou d'échange. $x \to y$ représente ici le prix à payer pour pouvoir échanger x contre y, ou plus précisément pour pouvoir passer de x à y.
- L'item précédent explique les axiomes de croissance et de décroissance
- La complétude de l'ordre est un ajout gratuit (qui n'a pour l'instant pas joué un grand rôle)
- La volonté purement logique (au sens de *logique mathématique*) de mettre tout au même niveau est ce qui conduit à l'introduction d'un élément "<neutre"> appelé 1. Il permet de voir a comme l'implication $1 \to a$. Comme on l'a vu ça a des conséquences particulièrement riches.
- Il y a une erreur à ne pas faire: $\leq$ ne représente pas une force. Il vaut mieux lire $x \leq y$ comme *y est l'un des visages de x*. Par exemple, rien n'indique qu'on puisse échanger un porte-monnaie contenant une pièce x et une pièce y contre un porte-monnaie contenant seulement une pièce x. Si intuitivement le premier contient plus que le deuxième, on ne peut pas considérer honnêtement que le deuxième peut être vu comme le premier, ou encore qu'il est un des visages du premier.
- On dit qu'on peut jeter un élément x sans coût quand $\forall y : y \leq (x \to y)$.
- On a découvert que tout élément dont 1 est un des visages, ie tout élément ≤ 1, peut être jeté sans coût. L'objet 1 s'apparente au vide.

- L'objet 0, mal nommé, est le paradis ou encore la lampe d'Aladin. Tout objet est un des visages de 0. (De là à le nommer Dieu...)
- Il semble par contre, qu'en toute généralité, il y a un prix à payer pour jeter à la poubelle des éléments très peu engagés, comme par exemple le maximum de la structure (que nous avons appelé provisoirement V).
- Il reste à justifier philosophiquement la propriété de la définition qui affirme que la borne inférieure des $a \to x$ est inférieure ou égal à $a \to$ *borne* inférieure des x. Nous le ferons plus tard.

4.4 Faisons les poubelles

On se place dans un SUCU pendant toute la section. Comme vu précédemment, les divinités, euh pardon 0, et plus généralement les éléments plus petits que 1 sont jetables. Nous précisons un peu ce point:

Définition 24 *On dit que a est jetable quand* $\forall x \in A : x \leq (a \to x)$

On peut s'interroger sur la réciproque: les éléments jetables sont-ils tous ≤ 1? La réponse est oui:

Théorème 25 *Soit a un élément jetable. Alors* $a \leq 1$

Preuve: $1 \leq (a \to 1)$ donc $a \leq (1 \to 1) = 1$

Rappelons que les théorèmes de la structure sont les éléments qui dépassent 1. **Il s'en suit que le seul théorème jetable est** 1 **lui-même**. Les autres théorèmes ne sont pas jetables. En particulier, si $V \neq 1$ alors V n'est pas jetable. (Nous avons noté V l'élément plus grand que tous les autres)

Au début du document, nous avons décidé de ne nous intéresser qu'aux SUCU. Mais les SUC sont intuitivement très proches des SUCU, puisqu'on a juste ajouté 1. La question se pose de savoir si une SUC quelconque peut être regardée comme une SUCU. On se place donc dans une SUC (sans supposer qu'elle est une SUCU). On note $u :=$ la borne inférieure des $x \to x$. Question: u se comporte-t-il comme le 1 d'une SUCU?

4.5 Exemples de SUCU

4.5.1 La SUCU des probabilités naïves

Soit $A := [0; 1]$ l'intervalle des nombres réels compris entre 0 et 1 et $\leq$ son ordre naturel. On définit $x \to y := 1-x+xy$. La structure $(A, \to, \leq)$ est une SU. C'est en fait une SUCU du fait que

$$(x \to (y \to z)) = (y \to (x \to z)) = 1 - y + y(x \to z) = 1 - y + y(1 - x + xz) = 1 - xy + xyz$$

Dans cette SUCU, l'élément 1 y est plus grand que tous les autres. On y trouve aussi un élément x tel que $(x \to 0) = 1 - x$ est égal à x. L'ordre y est total. L'intérêt de cette SUCU est entre autre que $inf_{x,y}((x \to (x \to y)) \to (x \to y)) = 0$

4.5.2 Une SUCU emblématique

Soit $(R, *)$ où $*$ est une application de R^2 dans R associative et commutative, dotée d'un élément neutre e. Soit A l'ensemble des parties de R qui sont stables par $*$. Soit $\leq$ l'inclusion sur A. Soit $\to := [(X, Y) \in A^2 \mapsto \{t \in R \mid \forall x \in X : t * x \in Y\}]$.

Théorème 26 *La structure ainsi définie* $(A, \to, \leq, \{e\})$ *est une SUCU*

Preuve: tous les ensembles qui suivent sont supposés des éléments de A. On suppose que $G \subseteq H$ et que $(G \to H) \subseteq (K \to L)$. On souhaite prouver que $K \subseteq L$. Soit $k \in K$. Comme $e \in (G \to H)$, donc $e \in K \to L$ donc $k = k * e \in L$. Soient des G_i, H_i. Notons G l'intersection des G_i, H celle des H_i et C celle des $G_i \to H_i$. On souhaite prouver que $C \subseteq (G \to H)$: soit $c \in C, g \in G$. Pour tout $i : g \in G_i$ et de plus $g \in G_i$, donc $c * g \in H_i$. Finalement $c \in (G \to H)$. On laisse la vérification de la commutativité au lecteur.

4.5.3 Les SUCU usuelles

N'importe quelle topologie (sur un ensemble E) est une SUCU, avec $(U \to V) :=$ la réunion des ouverts X tels que $U \cap X \subseteq Y$. L'ordre est l'inclusion et l'unité est E.

4.6 Un théorème édifiant

Sur le plan philosophique, on peut considérer que les SUCU (les modèles de la logique linéaires) apportent en un certain sens une sorte de tentative de chemin alternatif à la contradiction originelle (l'existence apparente dans le désir humain d'une phrase disant *j'implique tout*, ie d'une phrase a telle que $a = (a \to tout)$. En effet, cette existence ne permet plus de déduire *tout* si on refuse d'accepter l'axiome de clonage des hypothèses.

Ce n'est hélas qu'un réconfort très provisoire. Adoptons le formalisme linéaire sans en exclure les connecteur unaires exponentiels ! et ?. Nous remettons sous une forme abstraite un théorème déjà démontré dans "*structures de valeurs de véritée* sur HAL, du même auteur:

Théorème 27 *Toute SUCU où il existe un élément a tel que $a = (!(a \to tout))$ est un singleton.*

preuve: On note 0 le minimum de la SUCU. Comme $a =!(a \to 0)$ en particulier $a \leq a \otimes a$. De plus, $a \leq (a \to 0)$ donc $(a \otimes a) \leq 0$. Donc $a \leq 0$. Donc $1 \leq (a \to 0)$, donc $1 \leq !(a \to 0)$, donc $1 \leq a$, donc $1 \leq a \leq 0$ donc $1 = 0$. Il s'ensuit que $x = x \otimes 0 \leq 0 \otimes 0 = 0$. CQFD

4.7 Définitions plus fondationnelles

4.7.1 Une drôle de SUU

.

Ce paragraphe est informel. On ne suppose ni l'axiome du choix, ni l'axiome de fondation. Par contre on suppose l'existence d'une $\mathbb{R}$ espace vectoriel E qui est égal à $L(E, E)$, $L(E, E)$ étant l'espace des applications linéaires de E dans E. Un certain nombre d'éléments canonique de E sont définissables. Par exemple, l'identité est un élément intéressant et canonique de E. De même pour $j : x \mapsto (f \mapsto f(x))$. Notons A l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E. Pour des éléments U, V de A, disons que $U \leq V$ quand il existe un élément canonique de E qui envoie tous les éléments de U dans V. On obtient ainsi un préordre. Notons $(X \to Y) := \{t \in E \mid \forall x \in U : t(x) \in V\}$ entre deux sous-espaces de E. Cela construit une SUCU.

Question: ZF + l'existence d'un tel espace vectoriel est-il consistant?

Nous gardons le même sigle "<SUCU"> puisque c'est équivalent, mais nous enlevons une condition. On appelle préSUCU la donnée d'un uplet $(A, \to, \leq, 1)$ où:

- $\leq$ est un ordre complet pour A (toute partie a une borne sup et une borne inf)
- $\to$ est une application de A^2 dans A et pour tout $x \in A : (1 \to x) = x$
- Pour chaque $a \in A : (x \mapsto (a \to x))$ est croissante
- Pour chaque $a \in A : (x \mapsto (x \to a))$ est décroissante

- Pour tous $x, y : 1 \leq (x \to y)$ si et seulement si $x \leq y$
- $\forall x, y, z : (x \to (y \to z)) = (y \to (x \to z))$

Nous avons enlevé une propriété, celle de "<plénitude">: *pour tout ensemble E et toutes applications f, g de E dans A, la borne inférieure des $(f(e) \to g(e))$ est $\leq a \to b$ en notant a la borne inférieure des $f(e), e \in E$ et b la borne inférieure des $g(e), e \in E$*. Lidée est de s'interroger pendant un paragraphe sur sa nécessité pour que le concept soit fructueux.

Soit X une partie d'une préSUCU. On note $s := sup(X)$. Par définition, $(s \to a) \leq$ chacun des $x \to a$ quand x parcourt X, donc $(s \to a) \leq inf(x \to a, x \in X)$. Le retrait de la propriété retirée fait qu'il n'est plus évident que $w := inf(x \to a, x \in X) \leq (s \to a)$.

Si $x \in X$ alors $(w \to (s \to a)) = s \to (w \to a) \geq (s \to ((x \to a) \to a)) \geq (s \to x)$. Autrement dit, $(w \to (s \to a)) \geq t := sup(s \to x, x \in X)$. On est conduit à se poser une question bien centrale: soit X un ensemble et $s := sup(X)$. Est-ce que tout majorant m de $\{s \to x \mid x \in X\}$ est ≥ 1?